

Identificación de Modelos y Variables Económicas

Fecha de recepción: 06-06-2014

Fecha de aceptación: 27-11-2014

V. Yolanda Daniel Chichil¹
Sergio Solís Tepexpa²

RESUMEN

El proceso administrativo y la toma de decisiones en las organizaciones requiere la aportación de diversas disciplinas que facilite la obtención y procesamiento de datos, entre éstas se encuentra por ejemplo la Matemática y la Informática. En particular, la utilización de la herramienta matemática por parte de la Administración ha evolucionado de manera significativa, pasando por la simple aritmética, el álgebra, el cálculo y la estadística hasta llegar a la econometría. Por lo cual su desarrollo en este documento persigue como objetivo ilustrar y motivar el aprendizaje de la aplicación de modelos econométricos al reconocer que la aplicación de modelos básicos de oferta-demanda proporcionan instrumentos para explicar el comportamiento de los fenómenos del mercado propios del ámbito profesional.

Resulta importante mencionar que, el trabajo no aborda un proceso de estimación de los parámetros del sistema de ecuaciones estructurales formulado, no se llega a un valor numérico, sin embargo se explican de manera clara y sencilla las características de los modelos económicos (oferta-demanda y el equilibrio) y sus variables las cuales hacen necesaria una manipulación algebraica tal que se obtenga un modelo en el que sea posible identificar (más no obtener) a la ecuación ó ecuaciones mediante la aplicación del modelo del análisis de regresión y su método de estimación de mínimos cuadrados indirectos.

Palabras clave: Econometría, oferta y demanda, equilibrio, Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI), Parámetros.

¹ Profesora - Investigadora del Departamento de Producción Económica de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Xochimilco. Correo electrónico: ydaniel@correo.xoc.uam.mx

² Profesor - Investigador del Departamento de Producción Económica de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Xochimilco. Correo electrónico: ssolis@correo.xoc.uam.mx

ABSTRACT

Within organizations, the process of decision making requires input from various disciplines to facilitate the acquisition and data processing. On the side of the basic sciences are Mathematics and Computer Science. In particular, the use of mathematical tool by the Administration, has evolved significantly, through simple arithmetic, algebra, calculus and statistics up to econometrics. In this sense, the development of this document aims to illustrate and motivate the learning of the application of econometric models. It is important to recognize that the application of basic supply-demand models provide tools to explain the behavior of market phenomena themselves professionally.

However, the work does not address the process of estimating the parameters of the system of structural equations formulated, nor is a numeric value is generated. In this paper are explained clearly and simply the characteristics of economic models (supply-demand balance) and variables which necessitate an algebraic manipulation so that a model in which it is possible to identify the equation is obtained equations or through the application of regression analysis and the method of least squares estimation indirect. (ILS).

Keywords: Estimators, econometrics, Indirect Least Squares, Supply-Demand, equilibrium

Introducción

El proceso administrativo y la toma de decisiones en las organizaciones requiere la aportación de diversas disciplinas que facilite la obtención y procesamiento de datos, entre éstas se encuentra por ejemplo la Matemática y la Informática. En particular, la utilización de la herramienta matemática por parte de la Administración ha evolucionado de manera significativa, pasando por la simple aritmética, el álgebra, el cálculo y la estadística hasta llegar a la econometría. Ésta última es considerada una de las grandes herramientas en la valoración y predicción del comportamiento de las variables económicas y del estudio de fenómenos económicos; se considera como una ciencia social que conjunta a la teoría económica con aplicaciones de matemáticas y estadística inferencial. Para Tintner (1968, p. 74) “la Econometría, es resultado de cierta perspectiva sobre el papel que desempeña la Economía, consiste en la aplicación de la Estadística Matemática a la información económica para dar soporte empírico a los modelos construidos por la Economía Matemática y obtener resultados cuantitativos” (Portillo, 2006). Un ejemplo de esto son los modelos econométricos utilizados por el Banco de México para predecir el comportamiento de los agentes económicos y estimar de manera más acertada la cantidad de dinero que el mercado demandará en un día. Sin embargo, estos conocimientos han permeado hacia la práctica organizacional, y ahora también son utilizados en la planeación y control. De manera más específica, las empresas necesitan calcular los precios a los cuales ofrecerán sus productos o cuanto deben ofertar de su producto. En el ámbito financiero también es posible usar series de tiempo para pronosticar niveles de liquidez, o apalancamientos ante ciertas condiciones.

De acuerdo con Gujarati (2010) existe un metodología tradicional, que es la predominante en los estudios económicos empíricos, y que consiste en las siguientes ocho etapas: i) planteamiento de la teoría o de la hipótesis; ii) especificación del modelo matemático de la teoría; iii) especificación del modelo econométrico o estadístico de la teoría; iv) obtención de los datos; v) estimación de los parámetros del modelo econométrico; vi) prueba de hipótesis; vii) pronóstico o predicción; y viii) utilización del modelo para fines de control o de política. En este trabajo se llegará a la especificación del modelo, es decir la etapa tres.

El problema de la identificación de modelos y variables económicas conjuga óptimamente al Álgebra lineal, a la Probabilidad, a la Estadística y al Cálculo Diferencial, por lo cual su desarrollo en este documento persigue como objetivo ilustrar y motivar el aprendizaje de la aplicación de modelos econométricos, por parte de los administradores, al reconocer que la aplicación de modelos básicos de oferta-demanda proporcionan instrumentos para explicar el comportamiento de los fenómenos del mercado, de suma importancia para la planeación en los departamentos de mercadotecnia y producción. Por lo anterior, el trabajo no aborda un proceso de estimación de los parámetros del sistema de ecuaciones estructurales formulado,

no se llega a un valor numérico, sin embargo se explican de manera clara y sencilla las características de los modelos económicos (oferta-demanda y el equilibrio) y sus variables las cuales hacen necesaria una manipulación algebraica tal que se obtenga un modelo en el que sea posible identificar (más no obtener) a la ecuación ó ecuaciones mediante la aplicación del modelo del análisis de regresión y su método de estimación de mínimos cuadrados indirectos.

Para ello, se parte de la especificación econométrica más sencilla de un modelo de oferta-demanda integrada por tres ecuaciones; la de oferta, la de demanda y la condición de equilibrio:

$$\text{Demanda: } Q_t^d = \alpha_1 + \beta_1 P_t^d + \varphi_1 Y + \mu_1$$

$$\text{Oferta: } Q_t^s = \alpha_2 + \beta_2 P_t^s + \varphi_2 R + \mu_2$$

$$\text{Equilibrio: } Q_t^d = Q_t^s$$

Donde:

Q_t y P_t son las variables endógenas simultáneamente determinadas,

Y es la renta familiar disponible (variable exógena)

R es el precio de un factor productivo (variable exógena)

μ_1 y μ_2 son perturbaciones estocásticas.

A partir de este planteamiento se obtienen estimaciones de los parámetros estructurales pero para ello es necesario que el sistema esté identificado; es decir, que dada la forma establecida sea posible obtener valores numéricos concretos para estos parámetros. Para ello, se establece un sistema de ecuaciones que permite crear las condiciones necesarias y/o suficientes para analizar si es posible la obtención de estimaciones consistentes de los parámetros estructurales, es decir, si una ecuación está identificada o, por el contrario, no está identificada. Las condiciones necesarias se denominan condiciones de orden y, las suficientes, condiciones de rango. Para poder ilustrar este proceso se inicia con la explicación de las características muy particulares de los modelos económicos y sus variables que los hacen susceptibles de aplicar (con sus debidas restricciones) las herramientas que proporciona la matemática -en particular la econometría- para su estudio; se utilizan como ejemplos los resultados publicados en trabajos que relacionan variables de interés para los economistas y administradores.

Esto da la pauta para que el análisis de regresión se explique brevemente, señalando las suposiciones básicas en lo que se refiere al término estocástico de perturbación y más adelante una explicación de los elementos importantes del método tradicional de estimación empleado por el análisis de regresión: el de mínimos cuadrados. Este método se incluye porque se considera un requisito indispensable para entender el problema de la identificación de los modelos económicos y el proceso de formulación de un problema en una sola ecuación en el modelo de regresión y la estimación de los parámetros involucrados. En la segunda y última parte, se

expone el problema de la identificación para lo cual se recurrió al ejemplo utilizado por primera vez por E. J. Working (Oferta-Demanda). Se eligió este ejemplo debido a que se utiliza un enfoque gráfico en dos dimensiones con funciones muy familiares en economía y administración como lo son la oferta y la demanda, lo que le permitirá entender el problema de la identificación cuando aparece un sistema de M ecuaciones y M variables como es usual en la práctica.

Los modelos económicos

Las relaciones entre dos o más variables a las que se harán referencia, son las que se modifican a un mismo tiempo (dependencia conjunta) y que se estudian mediante una o más ecuaciones que operan en forma simultánea ó con desfases a través del tiempo, las cuales son muy frecuentes en la economía. Este tipo de relación entre las variables económicas, obligan a hablar más que de variables independientes y dependientes, de variables cuyo comportamiento es explicado por el modelo como un todo: el modelo de ecuaciones simultáneas determina los valores de un conjunto de variables, las variables endógenas, en términos de otro conjunto, las variables predeterminadas. A manera de ejemplo se pueden mencionar las siguientes variables que muestran dependencia conjunta:

- El consumo agregado puede verse influido por la renta agregada; ésta a su vez se determina por el gasto total que incluye los gastos de consumo.
- La variación en el salario depende de la variable en los precios, del desempleo; a su vez las variaciones salariales también influyen en la variación de los precios.
- Respecto al desplazamiento a través del tiempo, puede haberlo entre el gasto y su impacto en la renta; entre una variación salarial y su impacto en los precios.

Para analizar con precisión estas relaciones, y así poder explicar y/o predecir el fenómeno en estudio, ya sea que se relacionen entre sí (análisis estructural) y/o con respecto a la forma en que se desarrollan en el tiempo (análisis dinámico) se emplean técnicas de la estadística y la econometría. Las relaciones estructurales que interesan a los economistas se refieren a las formas de acción, reacción e interacción de los agentes económicos. Estas relaciones se agrupan en cuatro categorías: de comportamiento que incluye funciones de oferta y demanda; tecnológicas que incluyen, fundamentalmente, funciones de producción; institucionales que se refieren a las especificadas por la ley u organismos reguladores; la cuarta categoría es la de identidades o ecuaciones de balance de naturaleza contable.

Cuando estas relaciones se especifican en forma determinística -para un valor determinado de una variable, corresponde un único valor de la otra variable-

evidentemente se incurre en un grave error porque ¿cómo introducir en una relación de causa-efecto las reglas y motivos que gobiernan el comportamiento humano como sucede en los modelos económicos?

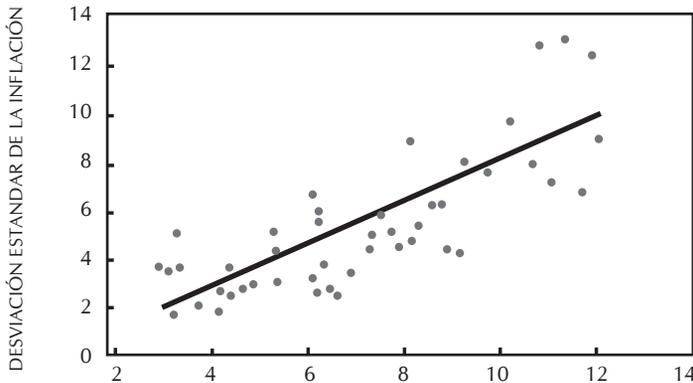
Para entender lo anterior, considérese que se desea explicar la distribución del gasto de un conjunto de familias que tienen cierto nivel de ingreso, bajo la suposición de que el gasto es una función lineal del ingreso familiar. Si el comportamiento en el consumo fuese idéntico para todo el grupo, y si todos los demás factores que influyen en los gastos sobre el consumo fuesen los mismos, se esperaría entonces que todos los valores del gasto del grupo de ingresos seleccionado sea el mismo. La probabilidad de que todas estas condiciones se mantengan simultáneamente es muy pequeña; es decir, para un nivel dado de ingresos, el nivel de gasto en el consumo puede esperarse razonablemente que difiera de familia en familia; estas diferencias podrían considerarse a través de la introducción de un elemento aleatorio en el modelo, o como en el caso, en la relación funcional lineal supuesta, originando con ello la utilización de un modelo estocástico para el que se debe suponer la distribución de probabilidad de las variables aleatorias involucradas.

La estadística dispone de un modelo (el de Análisis de Regresión Múltiple) que involucra los elementos hasta ahora señalados y que permite explicar, conocer y estimar las relaciones entre variables. Se considera pertinente ilustrar brevemente los diferentes modelos económicos para los que se utiliza una técnica específica de la estadística y que se incorpora y amplía en el Análisis de Regresión.

Clasificación de los modelos económicos

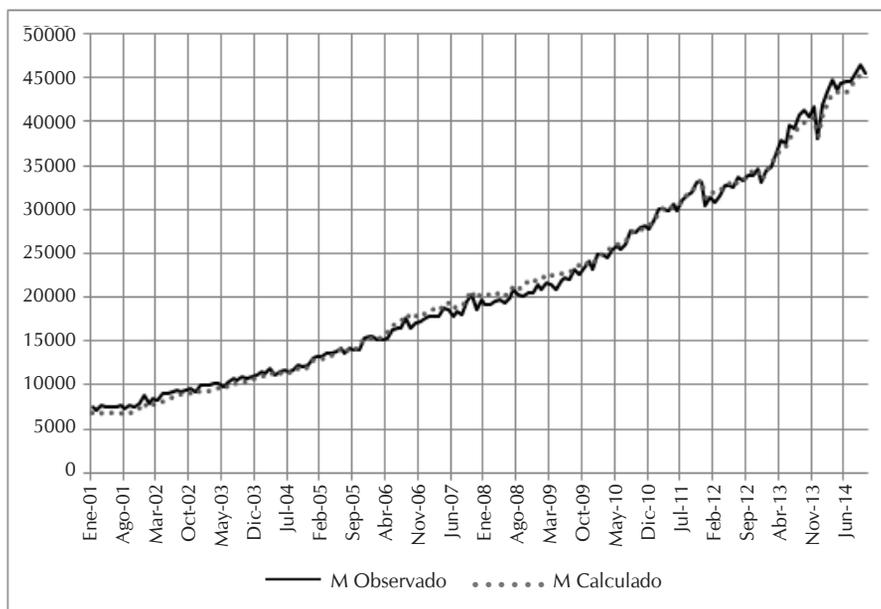
Los modelos se clasifican en descriptivos, explicativos, de predicción y de decisión, con los cuales se pretende descubrir, explicar y prever los hechos para elegir un curso de acción.

Cuadro 1
Inflación e incertidumbre inflacionaria



Fuente: Hess, Gregory and Morris, Charles S. "The long-run cost of moderate inflation" in Economic Review, vol 81, num. 2, 1996.

Cuadro 2
Representación de M y de M* en función del tiempo



Fuente: Elaboración Propia con datos del Banco de la República

i) los modelos descriptivos sólo representan los fenómenos reales sin explicarlos o conocer su evolución ni tendencias; por lo tanto no interesan para efectos de predicción; básicamente utiliza distribuciones estadísticas de probabilidad y correlaciones empíricas; solo a manera de ejemplo, se presenta la siguiente gráfica que muestra la relación entre la inflación y la incertidumbre inflacionaria para 47 países con moderada a baja inflación.

Esta relación se estudia con base en una recta de regresión lineal que mide la respuesta promedio de incertidumbre inflacionaria a un cambio en la inflación; la pendiente de la recta de regresión indica que la variabilidad en la inflación se mueve casi en una relación uno - a - uno con la inflación.

ii) Los modelos explicativos estudian las regularidades sugeridas por los modelos descriptivos y los encadenamientos de causa y efecto que se comprueban entre los fenómenos; tampoco hay interés predictivo ni normativo en su utilización; la gráfica siguiente muestra la masa monetaria observada (M) y calculada (M*) en Colombia de enero de 2001 a octubre de 2014. La masa monetaria en un instante determinado se expresa como función de los valores pasados de la tasa de crecimiento de los precios, bajo la premisa de que los agentes económicos se comportan en función

del recuerdo que guardan del pasado; la influencia del pasado disminuye a medida que se aleja en el tiempo. El coeficiente de correlación entre los valores observados y calculados es de 0.999, es decir, la explicación de la realidad es casi perfecta.

iii) Los modelos predictivos utilizan los resultados obtenidos en el análisis descriptivo y explicativo de los hechos. Se basan en el comportamiento pasado y lo extrapolan suponiendo que permanecerá constante; se supone permanencia estructural de los fenómenos.

iv) los modelos de decisión se proponen descubrir las medidas que debieran tomarse para cumplir con un objetivo predeterminado; su interés es normativo, por lo cual es necesaria la concepción personal del economista acerca del modelo.

El análisis de regresión

La herramienta estadística de más amplio uso es el análisis de regresión; proporciona un método sencillo para establecer una relación funcional entre variables. Estas relaciones se expresan a través de modelos lineales³ cuya forma general es, para el caso de una ecuación con n variables independientes y una dependiente:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon_i$$

donde: y : variable dependiente a explicar

β_i : son los coeficientes de regresión ó parámetros a estimar ($i = 1, 2, \dots, n$).

x_i : variable explicativa, se considera fija.

ε_i : variable estocástica, término de perturbación ó error.

El término de perturbación puede representar el efecto de todas las variables excluidas en el modelo, la imprevisibilidad del comportamiento humano (como gustos, preferencias, etc.) y los errores de observación o medida de las x_i ; representa la incapacidad del investigador de tener un modelo exacto de la realidad observada.

El modelo de regresión es de gran utilidad en la medida en que se haya seleccionado adecuadamente las variables que proporcionen la máxima información posible acerca del ambiente en que se desenvuelve la variable que se desea explicar; que se mantenga la suposición de linealidad entre las variables; que las observaciones de x se hayan obtenido por medio de un experimento controlado tal que los factores irrelevantes puedan mantenerse constantes. Esta última condición es difícil de cumplir en la práctica ya que el investigador no tiene control sobre situaciones que influyen en la variable a explicar; para los economistas, por ejemplo, serían los precios internacionales de productos, el ingreso esperado de los consumidores, etc.

³ La linealidad del modelo se refiere a que lo es en los parámetros β 's aunque no en sus variables x 's cuyos exponentes pueden ser $\neq 1$. La forma general presentada es un modelo lineal de primer orden.

Si el interés primordial al estimar una ecuación lineal es el de explicación y medición, el análisis de regresión proporciona las técnicas analíticas para que desde un enfoque puramente estadístico, se tenga la confianza (en términos probabilísticos) de que el modelo lineal propuesto esté representando y explicando a las variables que lo componen y que las estimaciones a efectuar también gozan de esa confiabilidad. Las suposiciones básicas del modelo de regresión que permiten asegurar con un cierto nivel de confianza que es el que mejor explica a las variables involucradas, se refieren a la distribución de probabilidad del término de perturbación:

- i) el valor esperado de la perturbación es cero y varianza constante, es decir, existencia de homoscedasticidad para cada conjunto de valores observados de x aunque la varianza sea desconocida, i.e.,

$$E[\varepsilon_i] = 0$$

$$\text{Var}[\varepsilon_i] = \sigma^2$$

- ii) $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ están no correlacionados, su covarianza es cero:

$$\text{Cov}[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

$$E[y_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i; \quad \text{Var}[y_i] = \sigma^2$$

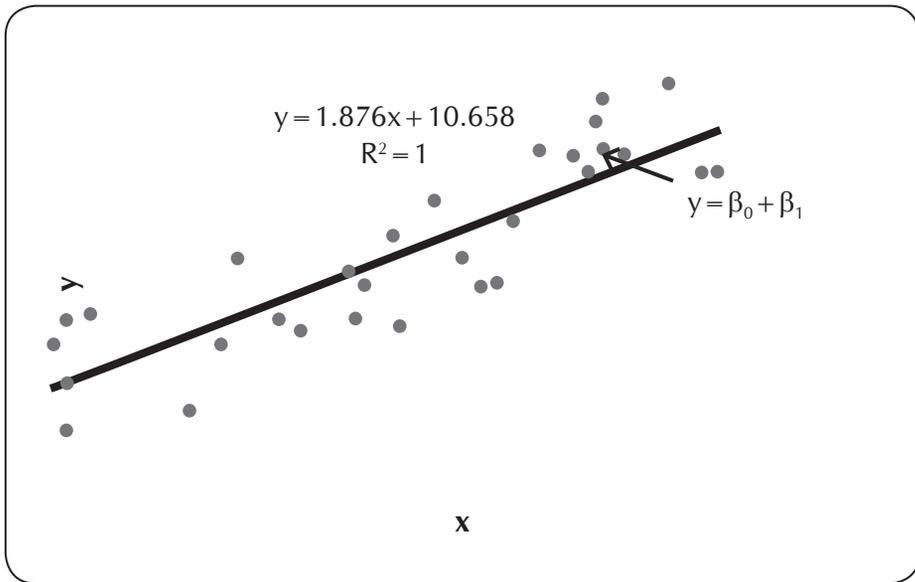
(ó x_i no tiene correlación con ε_i) esto se cumple automáticamente cuando x_i es una variable aleatoria.

- iii) La perturbación o error se distribuye normalmente con media cero y varianza σ^2 desconocida (por lo cual también se estima en el modelo).

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Esta suposición implica que las perturbaciones son independientes: el error de una observación no depende del valor del error de cualquier otra observación. La suposición de normalidad es lo que hace que ε_i sea estocástico. Debido a que la ecuación de regresión se puede utilizar para realizar inferencias, se imponen ciertas condiciones a los estimadores de los parámetros β y σ^2 los cuales se cumplen si el método llamado de Mínimos Cuadrados se aplica para estimar la ecuación de regresión. Estas condiciones ó propiedades deseables son: insesgamiento ($E[\hat{\beta}] = \beta$, $E(S^2) = \sigma^2$); varianza mínima (poseen la menor varianza que cualquier otro estimador insesgado lineal); son funciones lineales de \hat{y} . Por esta razón también reciben el nombre de estimadores insesgados lineales óptimos.

El principio básico del método de mínimos cuadrados es el de minimizar la distancia que existe entre los valores observados y los ajustados que están sobre la recta de regresión.



El método de mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros β se presenta de manera breve, ya que no se considera relevante mostrar el desarrollo completo, pues nos desviaría del objetivo que se persigue. En la gráfica debe apreciarse que en realidad se deben minimizar las n desviaciones (errores) verticales de la recta ajustada. Para ello se parte de:

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad [*]$$

Para minimizar esta suma de cuadrados (SC) obsérvese que:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i,$$

sustituyendo en [*] tenemos que:

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2$$

y recurriendo al cálculo diferencial para minimizar las distancias:

$$\frac{\partial \sum (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \qquad \frac{\partial \sum (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0$$

$$\sum y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_i$$

$$\sum x_i y_i = \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente y despejando se obtienen los estimadores (llamados mínimos cuadrados) de la ecuación de regresión:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum y_i)^2} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Existe toda una serie de pruebas estadísticas acerca de los estimadores del modelo de regresión para tener la certeza de que cualquier inferencia que se haga a partir de él tenga validez:

- el cálculo del coeficiente de determinación R^2 , el cual se interpreta como la proporción del total de la variabilidad en que es explicada por x . Si R^2 está muy cerca de 1, entonces x explica una gran parte de la variación de y .

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

el análisis de residuales ($\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i$) a través de la construcción de la tabla de análisis de varianza .

- Construcción de intervalos de confianza.
- Elaboración de pruebas de hipótesis.

El problema de la identificación⁴

El punto central en el trabajo econométrico es la estimación estructural de los parámetros que definen el comportamiento de los agentes económicos y las relaciones tecnológicas de las que se hablaron cuando se definió un modelo económico; dada la naturaleza de los problemas a estudiar en la economía, una ecuación estructural forma parte de un sistema, es decir, todas ellas se mantienen simultáneamente, por lo que no es suficiente el conocer las variables que definen a la ecuación, sino cuáles son las que aparecen en las ecuaciones restantes ó bien poseer información adicional acerca de la ecuación a estimar ya que las observaciones de la variable ó variables involucradas aún cuando sean completas en extensión y calidad, no basta por sí mismas para identificar a la ecuación: no puede tenerse la certeza que ella pueda ser capaz de generar los datos observados.

Existe una serie de problemas que surgen en la construcción de modelos económicos constituidos por varias ecuaciones, como es el caso que nos ocupa, que

⁴ La identificación hace referencia a la posibilidad de calcular los parámetros estructurales del modelo de ecuaciones simultáneas a partir de los parámetros en forma reducida. Es por ello que una ecuación del sistema esta exactamente identificada si el número de variables exógenas excluidas de la ecuación es igual al número de variables endógenas de la ecuación menos uno.

han generado mayor preocupación entre los economistas; estos problemas son precisamente la identificación, el ordenamiento causal y los métodos de estimación.

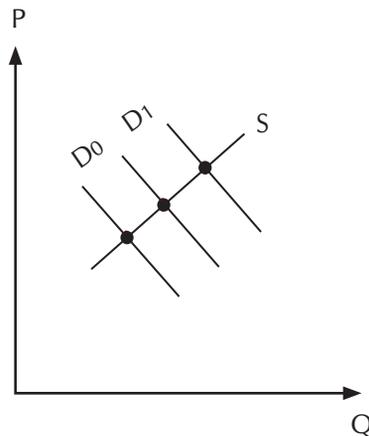
Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI)

Para entender el problema de la identificación del modelo y de sus variables, se recurrirá al ejemplo clásico utilizado por primera vez por E. J. Working que se refiere al equilibrio de la oferta y la demanda para un bien determinado. El hecho de trabajar con sólo una variable independiente, nos circunscribe al plano cartesiano de dos dimensiones, lo que ya de por sí se explica por sí mismo: la comprensión del problema de la identificación se facilita enormemente; se requiere que se conozcan los sistemas de ecuaciones simultáneas; se debe suponer que se conoce con precisión la relación causa-efecto entre las variables, es decir, se sabe qué variable es la que explica a la otra. Supóngase que se desea estimar la función de la oferta y demanda del mismo producto mediante el análisis de regresión; se supone un comportamiento lineal para cada función y que sólo se dispone de tres valores que comprenden al precio y cantidad consumida en cualquier período y que estos puntos son los de equilibrio. Es interesante observar que aparecen las mismas variables P y Q en ambas ecuaciones.

Como sólo se tienen tres observaciones periódicas que representan intersecciones de las curvas de oferta y demanda, se puede razonablemente suponer que pueden presentarse los siguientes casos:

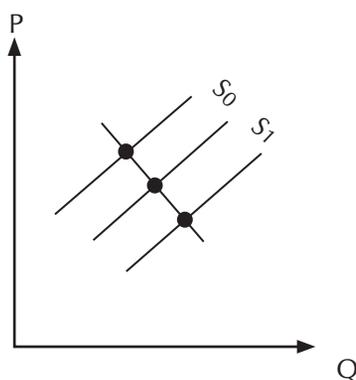
- i) que la curva de oferta (S) se mantenga fija, pero la demanda (D) no, entonces la gráfica de esta situación se vería como lo muestra la figura 2, en cuyo caso se diría que se ha identificado a la curva de oferta porque los puntos de intersección determina a la curva.

Figura 2
Oferta Fija



ii) que la curva de demanda se mantenga fija, pero la oferta no, entonces la gráfica de esta situación se vería como la figura 3.

Figura 3
Demanda Fija

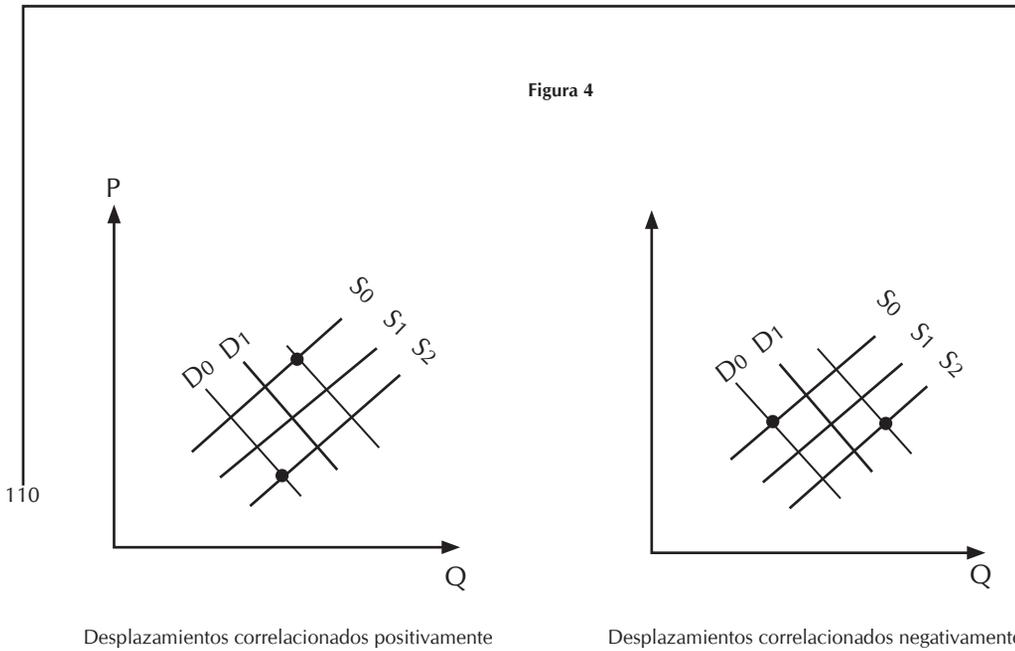


109

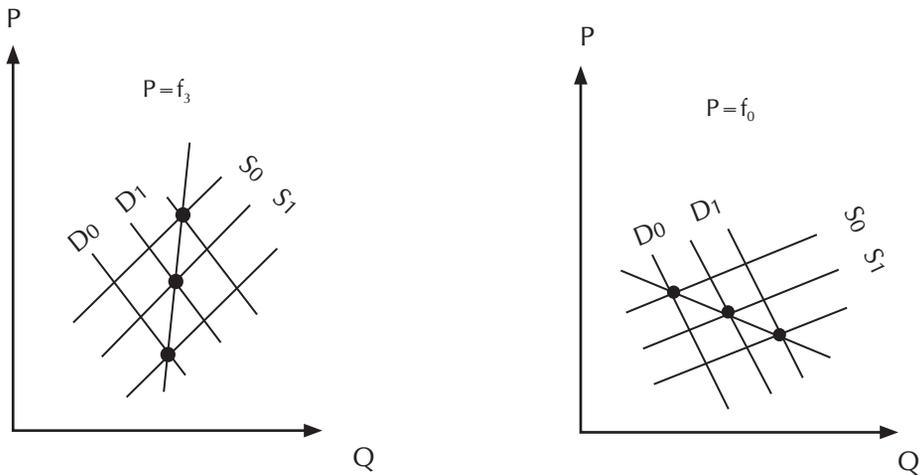
En este caso se dice que se ha identificado la curva de demanda porque los puntos de intersección son los que determinan a la curva.

Es muy tentador examinar el signo de la pendiente de cada una de las curvas posibles: si los tres puntos están sobre la recta con pendiente positiva, se puede intuir que se está en presencia de una curva de oferta y si estuvieran sobre la recta con pendiente negativa, se pensaría que se trata de la curva de la demanda. Es obvio que las tres observaciones por sí mismas no proporcionan información acerca de las pendientes. Además recuerde que en general una curva de oferta puede tener pendiente cero, infinita ó positiva; esto significa que aunque se pudiera disponer de información acerca del signo de las pendientes, ésta no sería significativa para distinguir (y encontrar) la funciones de oferta y demanda.

En general ambas curvas tienden a sufrir desplazamientos a través del tiempo: éstas pueden estar correlacionadas positivamente, el nivel más alto de la curva de oferta sucede en el mismo momento en que la curva de demanda alcanza su nivel más alto y viceversa, o bien pueden estar correlacionados negativamente: el nivel más alto de la curva de oferta sucede en el mismo momento en que la curva de demanda alcanza su nivel más bajo y viceversa. Las respectivas gráficas podrían verse en la figura 4.



Ya que sólo se tienen tres observaciones del punto de equilibrio la única posición posible para él es estar sobre la recta que une a los dos restantes y si se supone perfecta la linealidad en el modelo ($r = 1$ y $r = -1$) de oferta y demanda respectivamente, se tendría:



Ahora bien, si la linealidad no es perfecta ($-1 < r < 1$) y se supone que ambas curvas sólo pueden adoptar las tres posiciones mostradas, entonces existen 3 de las

nueve intersecciones que pudieran ser las observaciones originales de P y Q; esto

significa que existen $\binom{9}{3} = 84$ formas diferentes de seleccionar tres puntos, es

claro que tres puntos estarán sobre la curva de oferta y tres sobre la curva de demanda, el resto estarán fuera de ellas. Si se eligiera cualquier tríada de éstas 84 formas, es obvio que se incurriría en un grave error que repercutiría en las estimaciones de los coeficientes de regresión, aunque el proceso de estimación fuese excelente, que conduciría a graves incongruencias al utilizar el modelo para efectos de predicción.

Se debe notar que dado un conjunto de valores para P y Q sin ninguna información adicional a la de que éstos son los puntos de equilibrio, no se puede garantizar que se está estimando la función de oferta ó la de demanda. Por lo tanto el problema no es de utilizar una técnica de estimación adecuada, sino de que "no existe ninguna técnica con la cual la demanda y la oferta puedan estimarse en esas condiciones".

Si se recurriera solamente al examen del coeficiente de correlación entre P y Q, y fuese significativamente bajo, ¿no bastaría para saber que el modelo es incongruente? La respuesta sería sí, si se tuviera la certeza que P y Q se estiman sin error o con errores insignificantes. Como generalmente este no es el caso, la solución sería considerar a ambas ecuaciones en forma simultánea e introducir variables tanto endógenas como exógenas y el término estocástico de error ó perturbación: con esto se hace evidente que el modelo de análisis de regresión es de inmediata aplicación, pero no es así debido a que se han modificado sustancialmente las suposiciones del modelo: P está correlacionada con los errores. El modelo de ecuaciones simultáneas ó ecuaciones estructurales es [•] :

$$\text{Demanda: } Q_t^d = \alpha_1 + \beta_1 P_t^d + \phi_1 Y + \mu_1$$

$$\text{Oferta: } Q_t^s = \alpha_2 + \beta_2 P_t^s + \phi_2 R + \mu_2$$

$$\text{Equilibrio: } Q_t^d = Q_t^s$$

Dónde:

Q_t y P_t son las variables endógenas simultáneamente determinadas (variables endógenas)

Y es la renta familiar disponible (variable exógena)

R es el precio de un factor productivo (variable exógena)

μ_1 y μ_2 son perturbaciones estocásticas.

Obsérvese que se puede hacer la regresión de P sobre Q y Y ó bien de Q sobre P y Y. Debido a que P está correlacionado con μ_1 , μ_2 , se obtendrían esti-

maciones inconsistentes al utilizar mínimos cuadrados para obtenerlos; se recurre entonces a convertir el sistema en la forma reducida, la cual consiste en expresar una variable endógena en función solamente de variables predeterminadas y perturbaciones estocásticas tal que desaparece el problema de correlación mencionado, logrando con ello utilizar el método de mínimos cuadrados para estimar los coeficientes de la forma reducida y posteriormente con tales estimadores, estimar a su vez a los coeficientes estructurales del modelo de regresión original; este procedimiento se le conoce como el de Mínimos cuadrados indirectos, a continuación se ilustra el procedimiento:

Si las ecuaciones estructurales [•] se resuelven para Q y P en términos de Y y R y se aplica cualquier método conocido para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas; el resultado es después de algunos pasos algebraicos:

112

$$Q_t^d = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\varphi_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} Y - \frac{\varphi_2 \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} R + \text{residuo}$$

$$Q_t^s = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\varphi_1}{\beta_2 - \beta_1} Y - \frac{\varphi_2}{\beta_2 - \beta_1} R + \text{residuo}$$

Sólo para efectos de simplificar la notación, se hará el siguiente cambio, sea:

$$\pi_1 = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \quad \pi_2 = \frac{\varphi_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \quad \pi_3 = -\frac{\varphi_2 \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}$$

$$\pi_4 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1} \quad \pi_5 = \frac{\varphi_1}{\beta_2 - \beta_1} \quad \pi_6 = -\frac{\varphi_2}{\beta_2 - \beta_1}$$

∴ la forma reducida sería:

$$Q_t^d = \pi_1 + \pi_2 Y + \pi_3 R + \mu_1$$

$$Q_t^s = \pi_4 + \pi_5 Y + \pi_6 R + \mu_2$$

con estas nuevas ecuaciones se utiliza el método de mínimos cuadrados ilustrado brevemente aquí, llegando a las siguientes estimaciones del modelo estructural:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_3}{\hat{\pi}_6} \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_5} \quad \hat{\varphi}_1 = \hat{\pi}_6 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$$

$$\hat{\varphi}_1 - \hat{\pi}_5 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) \quad \hat{\alpha}_1 - \hat{\pi}_1 \hat{\beta}_1 \hat{\pi}_4 \quad \hat{\alpha}_2 - \hat{\pi}_1 - \hat{\beta}_1 - \hat{\pi}_4$$

Con lo cual se ha identificado exactamente a la función de demanda y oferta: aquí el lector debería concluir que el problema de la identificación consiste, grosso modo, en la posibilidad de encontrar estimadores de los parámetros de la ecuación estructural a partir de los coeficientes estimados de la forma reducida.

No obstante que existen conjuntos diferentes de coeficientes estructurales que pueden coincidir con el mismo conjunto de datos, se pueden presentar los casos en que aparezca sólo un conjunto de valores para los estimadores (como el visto, y en cuyo caso se dice que el modelo está completamente identificado); que aparezca más de uno (en cuyo caso se dice que una ecuación está sobre identificada); si no se encuentra ningún conjunto, entonces la ecuación estructural está subidentificada.

Sí se parte del hecho de que la identificación del modelo está dada por la especificación del modelo estructural y por lo tanto debe ser posible establecerla sin recurrir a los valores numéricos de los coeficientes, se presenta un método alternativo para saber si un sistema está identificado: el llamado Orden y Rango de una Matriz, que facilita el trabajo de la identificación del modelo, sobre todo si se considera que este puede ser de múltiples ecuaciones.

113

Condiciones de orden y de rango para la identificación

El modelo general con M ecuaciones en M variables endógenas es:

$$Y_{1t} = \beta_{12} Y_{2t} + \beta_{13} Y_{3t} + \dots + \beta_{1M} Y_{Mt} + \alpha_{11} X_{1t} + \alpha_{12} X_{2t} + \dots + \alpha_{1k} X_{kt} + \mu_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_{22} Y_{2t} + \beta_{23} Y_{3t} + \dots + \beta_{2M} Y_{Mt} + \alpha_{21} X_{1t} + \alpha_{22} X_{2t} + \dots + \alpha_{2k} X_{kt} + \mu_{2t}$$

$$Y_{Mt} = \beta_{M2} Y_{2t} + \beta_{M3} Y_{3t} + \dots + \beta_{MM} Y_{Mt} + \alpha_{M1} X_{1t} + \alpha_{M2} X_{2t} + \dots + \alpha_{Mk} X_{kt} + \mu_{Mt}$$

Dónde:

y_{it} son las variables endógenas (para $i = 1, 2, \dots, M$)

x_{jt} son las variables predeterminadas (para $j = 1, 2, \dots, k$)

μ_{it} son las perturbaciones estocásticas (para $i = 1, 2$)

t es el número de observaciones (para $t = 1, 2, \dots, N$)

Esta forma desplegada del sistema puede abreviarse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{Mt} \end{bmatrix}_{M \times 1} = \begin{bmatrix} \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1M} \\ \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{M2} & \beta_{M3} & \dots & \beta_{MM} \end{bmatrix}_{M \times M} \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{Mt} \end{bmatrix}_{M \times 1} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \dots & \alpha_{Mk} \end{bmatrix}_{M \times k} \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{bmatrix}_{k \times 1} + \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \vdots \\ \mu_{Mt} \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Esta representación matricial no es más que la siguiente ecuación matricial⁵ :

$$Y = \beta Y + \alpha X + \mu$$

El hecho de haber representado por medio de matrices al sistema de ecuaciones, facilita el que se puedan aplicar algunos teoremas importantes del álgebra lineal que se refieren al rango de una matriz para conocer si el sistema asociado está determinado.

Condición de orden: Una condición necesaria, pero no suficiente, para la identificación es:

"en un modelo de m ecuaciones simultáneas, para que una ecuación esté identificada ésta debe incluir al menos (M-1) variables (endógenas y predeterminadas) que

114

⁵ Este resultado también puede ser obtenido con cuatro simples pasos que se muestran a continuación:
 Paso 1: se plantea el sistema matricial como se muestra abajo:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1m} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

Paso 2: se obtiene los parámetros de la siguiente forma:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Paso 3. Se obtienen las perturbaciones estocásticas de la siguiente manera:

$$\varepsilon = Y - X \hat{\beta}$$

Paso 4. Se determina la varianza de los estimadores realizando las siguientes operaciones:

$$S_{\beta}^2 = \frac{\varepsilon'\varepsilon}{n-K} (X'X)^{-1}$$

Dónde:

k son el número de variables independientes y n el número de observaciones.

aparecen en el modelo. Si excluye exactamente (M-1) variables, la ecuación estará exactamente identificada. Si excluye más de (M-1) variables, estará sobreidentificada"⁶.

En un modelo de M ecuaciones simultáneas, para que una ecuación esté identificada, el número de variables predeterminadas excluidas de esa ecuación no debe ser menor que el número de variables endógenas incluidas en esa ecuación menos uno (Gujarati, 2004:p.273);

$$(K - k) \geq m - 1$$

Condición de rango. (Condición necesaria y no suficiente):

...en un modelo de M ecuaciones en M variables endógenas, una ecuación está identificada si y solo si se puede construir por lo menos un determinante $\neq 0$ de orden (M -1) (M -1) a partir de los coeficientes de las variables (endógenas y predeterminadas) excluidas de esa ecuación, pero incluidas en las restantes ecuaciones del modelo... (Gujarati, 2010: p.273) Por lo anterior, bastaría obtener el rango de la matriz asociada al sistema de ecuaciones estructurales, el software correspondiente (Matlab, Mathematica, entre otro.) en virtud de la dimensión de los sistemas que los modelos económicos contemplan.

115

Conclusiones

En el desarrollo del tema se muestra la necesidad de que debe existir una conjunción de técnicas, habilidades, conocimiento y hasta sensibilidad en la aplicación de Mínimos Cuadrados Indirectos a fenómenos económicos y del ámbito de la administración que permitan explicar y predecir con cierta exactitud el comportamiento de las variables de estudio. Esta herramienta también es utilizada con fines de control y generación de políticas económicas que ayuden a incrementar el bienestar de una economía nacional.

Una de las justificaciones de presentar un modelo de Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI) es que en presencia de simultaneidad, el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), ya que si las variables explicativas, X, son no estocásticas o, si los son, están distribuidas independientemente del término de perturbación estocástico. Por ello, el método de MCI es apropiado para ecuaciones precisas o exactamente identificadas.

No obstante, se debe verificar el problema de identificación antes que el problema de la estimación debido a la existencia de un mismo conjunto de información

⁶ Para este caso tendríamos lo siguiente:

M = variables endógenas del modelo; m = variables endógenas de la ecuación; K = variables exógenas del modelo; k = variables exógenas de la ecuación.

que puede ser compatible con diferentes conjuntos de coeficientes estructurales. En el ejemplo de la oferta y demanda que se utilizó como base del análisis se puede observar que en la regresión del precio sobre la cantidad solamente, es difícil decir si se está estimando la función de oferta o la de demanda, porque el precio y la cantidad forman parte de ambas ecuaciones.

Si aunado a lo anterior se sabe que el problema de la identificación de los modelos y variables económicas se aprecia en toda su extensión en la formulación de modelos macroeconómicos en los que el número de ecuaciones estocásticas es elevado (sin mencionar el número de variables) y que en este tipo de modelos ha aparecido recientemente la tendencia a usar cada vez más a los modelos no lineales (en sus variables) para estudiar, por ejemplo, las relaciones de producción, las razones de precios y precios promedio, se pone de manifiesto una vez más no sólo la necesidad de una sólida formación matemática, sino que esta tendencia representa una gran veta a investigar en los procesos de formulación y estimación estadística de los modelos que interesan a la economía y la administración.

Se puede concluir además que el uso de Mínimos Cuadrados Indirectos tiene ventajas y desventajas. Por un lado, la desventaja principal es el uso de información limitada porque, para identificar cada ecuación y para estimar las ecuaciones en la forma reducida, debe conocerse la lista completa de variables exógenas del resto de ecuaciones; por lo tanto, sólo puede aplicarse en ecuaciones exactamente identificables. Otra desventaja es que, dado que hay que estimar la forma reducida, sólo puede aplicarse en modelos en los que el número de exógenas sea mayor que el de datos (no en modelos grandes). Y debido a lo anterior no es posible estimar los errores estándar del modelo a partir de los errores estándar de los coeficientes en la forma reducida. Además, no siempre se garantiza que los parámetros derivados hereden las propiedades MELI (Mejores Estimadores Linealmente Insesgados).

Sin embargo existe la ventaja de que si se cumplen las hipótesis básicas, los estimadores π son insesgados, consistentes y eficientes, por lo que la utilización de este método es recomendable en fenómenos económicos que tengan por objetivo el estudio de oferta y demanda, por ejemplo el modelo de Domar donde se maneja el ahorro y la inversión utilizando Mínimos Cuadrados Indirectos para determinar el equilibrio entre Ahorro(S) e Inversión (I).

Otro método que se puede utilizar para sistemas de ecuaciones exactamente identificables es el Mínimos Cuadrados en Dos Etapas (MC2E), que está diseñado para sistemas ecuaciones sobreidentificadas, aunque también no puede aplicarse a ecuaciones exactamente identificadas. Con la ventaja de que con este método es posible estimar los errores estándar de los parámetros y, como ya se mencionó con MCI no.

Cabe mencionar que este trabajo es la primera etapa de una serie de estudios utilizando el método de Mínimos Cuadrados Indirectos, pues se pretende desarrollar un modelo de tipo empírico que demuestre la utilidad y practicidad de éste en el desarrollo de modelos de toma de decisión.

Bibliografía

- Anderson, R., Sweeney, D. Williams, T. (2008), *Estadística para Administración y Economía*. Décima Edición. Ed Cengage Learning, México.
- Doran, H. (1989), *Applied Regression Analysis in Econometrics*. Ed. Marcel Dekker, Inc.
- Gujarati, D. (2010), *Econometría*. Quinta Edición. Ed. McGraw-Hill, México.
- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*. Princeton University Press. Princeton, N. J.
- Huntsberger, D. (1983), *Elementos de Estadística Inferencial*. Ed. Cecsca, México
- Jhonston, J. (2001), *Métodos de Econometría*. Ed. Vicens-Vives, Barcelona.
- Kennedy, P. A. (1992), *Guide to Econometrics*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press, Massachusetts.
- Lütkepohl, H. (2007), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Ed. Springer. USA.
- Pindyck, R. S. (2001), *Econometría: Modelos y Pronósticos*. Ed. McGraw-Hill, México.
- Portillo, F. (2006), *Introducción a la Econometría*. Notas de Clase. Licenciatura en Administración. Universidad de Rioja. España.
- Pulido, A. (2001), *Modelos Económicos*. Ed. Pirámide. Madrid.
- Salvatore, Dominick, (2004), *Estadística y Econometría*. McGraw-Hill, Madrid.
- Schmidt, S. J. (2005), *Econometría*. McGraw-Hill Interamericana, México.
- STewart, B. (1984), *Introducción a la Econometría*. Ed. Alianza
- Wooldridge, J. (2010), *Introducción a la Econometría: un enfoque moderno*. Cuarta Edición. Ed. Cengage Learning, México.